

Ленинградская область

Региональный турнир по математике

Отборочный этап

8-15 ноября 2025 г.

1. Сообщения кодируются последовательностями из 0 и 1, при этом допускается использование последовательностей, в которые входит не более двух рядом стоящих нулей и не более двух рядом стоящих единиц. (Например, последовательность 011001 разрешена, последовательность 011101 не разрешена.) Найдите число последовательностей, состоящих ровно из 12 символов.

2. Пусть $ABCD$ – параллелограмм на плоскости. Проведены две окружности, каждая имеет радиус R . Первая окружность проходит через точки A и B , вторая – через точки B и C . Пусть E – вторая точка пересечения окружностей. Известно, что E – не вершина параллелограмма. Докажите, что окружность, проходящая через точки A , D , и E также имеет радиус R .

3. Пусть a, b, c – положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

и определите, в каком случае достигается равенство.

4. Пусть $f(x)$ – функция, заданная на множестве неотрицательных целых чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$ и удовлетворяющая условиям

$$f(2x) = 2f(x), \quad f(4x + 1) = 4f(x) + 3, \quad f(4x - 1) = 2f(2x - 1) - 1$$

Докажите, что если для некоторой пары аргументов (x, y) выполняется $f(x) = f(y)$, то из этого следует, что $x = y$.

5. Разность двух целых чисел, являющихся кубами двух последовательных целых чисел, является числом n^2 , где n – натуральное число. Докажите, что n представляется в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

- Решения задач необходимо написать на бумаге, сканировать и отправить не позднее 15 ноября 2025 г. на e-mail konfint@yandex.ru
- Вопросы по условиям задач можно задать по электронной почте по указанному выше адресу.
- Не предполагается, что все команды-участники турнира решат все задачи, тем не менее, чем больше задач выполнено, тем выше рейтинг команды. Имеет смысл отправить все решения, в которых имеется хотя бы частичное продвижение.